Chapitre 1 : Suites

Objectifs :

* Reconnaître et exploiter une suite géométrique dans une situation donnée.
* Connaître la formule de la somme d’une suite géométrique
* Déterminer la limite d’une suite géométrique de raison strictement positive.
* mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel qn est inférieur à un réel a positif donné.
* Traduire une situation donnée à l’aide d’une suite arithmético-géométrique.

# Suites géométriques –Rappels

## Suites géométriques définies par récurrence

Définition : On appelle **suite géométrique** toute suite (Un) telle que pour tout entier naturel n, avec Uo donné, et où q ∈ ℝ

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

Remarque :

* Si q = 0, tous les termes de la suite, hormis peut-être sont nuls.  
  Si = 0, tous les termes de la suite sont nuls.  
  En dehors de ces deux cas, tous les termes de la suite sont différents de zéro.
* Pour démontrer qu’une suite est géométrique (en dehors des deux cas ci-dessus), il suffit d’exprimer en fonction de Un .

## Suites géométriques définies de façon explicite

Propriétés : Si la suit () est géométrique de raison q (avec q non nul) et de premier terme alors, pour tout, .

Et plus généralement, pour tout et pour tout, .

## Sens de variation d’une suite géométrique

Tracer les courbes suivantes :  ;  ; 

Théorème : La suite de terme général est :

* strictement croissante si q > 1
* strictement décroissante si 0 < q < 1
* ni croissante ni décroissante si q < 0, c’est une suite **alternée**.

DEMONSTRATION ?

Propriété : Soit (Un) la suite géométrique de raison q et de premier terme alors :

* Si > 0, alors la suite (Un) varie dans le même sens que la suite () ;
* Si < 0, alors la suite (Un) varie dans le sens contraire de la suite ().

Exemple : Étudier le sens de variation de la suite (Un) définie par : et la représenter dans un repère (O; I; J).

un+1 = 2 Un donc le quotient=2 donc la suite (un) est géométrique de raison q = 2 et de premier terme u0 = 0, 5

Le premier terme est positif et la raison q est supérieure à 1, donc la suite est strictement croissante.

Sa représentation graphique est l’ensemble de points de la figure ci-contre.

(Attention, les points ne sont pas reliés entre eux ! !)

## Somme de termes consécutifs d’une suite géométrique

Propriété : Soit (Un) une suite géométrique de raison q ≠ 1, de premier terme et n un entier naturel  
Alors : .

DEMONSTRATION

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d’une suite géométrique est :

Faire une remarque sur q=1

Exemple :

Chaque mois, un investisseur injecte du capital pour dynamiser une entreprise.

De 50 000 euros au départ, le capital injecté diminue chaque mois de 20 %. Le capital injecté au n-ième mois suit une suite géométrique car …………………………………………………………………

Donc la suite () des capitaux injectés mois après mois est une suite géométrique de raison q= …….

On utilise alors la propriété de la somme.

La somme des 12 capitaux injectés durant une année est :

# Limite d’une suite géométrique

Étudier la limite d’une suite (Un) c’est chercher ce que deviennent les nombres Un lorsque n devient grand (tend vers l’infini) ; plus précisément :

— Les nombres finissent-ils par se rapprocher d’un nombre fixe ?

— Les nombres finissent-ils par dépasser n’importe quel nombre aussi grand que l’on veut ?

Propriété : (admise) : Soit (Un) une suite géométrique du type .

* Si 0 < q < 1 alors lim () = 0
* Si q = 1 alors lim () = 1
* Si q > 1 alors lim () = +∞

Exemples :

Exemple 1 :

Calculer plusizurs terme et conjecturer

est la suite définie pour toutpar

est une suite géométrique de raison 1,03 et est croissante car

Graphiquement dans le menu récurrence, traceret chercher les valeurs de n à partir desquellesdépasse 100, 1 000 et 10 000.

Que peut-on en déduire ?

On peut démontrer que pour tout réel A, aussi grand que l'on veut,dépasse définitivement A à partir d'un certain rang. Ainsidépasse 100 à partir du rang 154, 1 000 à partir du rang 234 et 10 000 à partir du rang 312.

Dans cet exemple, plus le rang (n) devient grand et plus A devient grand .

On dit que la suitea pour limiteet on note

Exemple 2 :

est la suite définie pour toutpar

est une suite géométrique de raison 0,9 et est décroissante car

Graphiquement dans le menu récurrence, traceret chercher les valeurs de n à partir desquellesdevient plus petit que 0,1, 0,01 et 0,001.

Que peut-on en déduire ?

On peut démontrer que pour tout réel B, aussi proche de 0 que l'on veut,est définitivement compris entre 0 et B à partir d'un certain rang. Ainsiest plus petit que 0,1 à partir du rang 22, plus petit que 0,01 à partir du rang 44 et plus petit que 0,001 à partir du rang 66.

Dans cet exemple, plus le rang (n) devient grand et plus B se rapproche de 0 .

On dit que la suitea pour limite 0 et on note

# Suites arithmético-géométrique

Définition : Une suite (Un) est dite arithmético-géométrique lorsqu’il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier naturel n :